Clément Rau
Laboratoire de Mathématiques de Toulouse
Université Paul Sabatier-IUT GEA Ponsan

Application des théorèmes limite de proba à la logistique

Clement Rau

March 7, 2023

Table of contents

Généralités

- Il existe divers modèles pour répondre à la question de la gestion de stock :
  Wilson, Séries Chronologiques, Probabiliste/Statistique...
  On étudiera ici, modestement et seulement, une approche probabiliste.
- Dans ce cours, on se restreindra à l'optimisation des approvisionnements sur une seule période[1] de temps.

[1] La période se définit comme la durée entre 2 commandes chez le fournisseur.

Généralités

- Il existe divers modèles pour répondre à la question de la gestion de stock :
  Wilson, Séries Chronologiques, Probabiliste/Statistique...
  On étudiera ici, modestement et seulement, une approche probabiliste.
- Dans ce cours, on se restreindra à l'optimisation des approvisionnements sur une seule période[1] de temps.
- On doit avoir conscience que **la stratégie** de gestion de stock dépend de l'objectif visé par l'entreprise. (rentabilité, fidélisation, satisfaction clients...)

[1] La période se définit comme la durée entre 2 commandes chez le fournisseur.

Généralités

- Il existe divers modèles pour répondre à la question de la gestion de stock :
  Wilson, Séries Chronologiques, Probabiliste/Statistique...
  On étudiera ici, modestement et seulement, une approche probabiliste.
- Dans ce cours, on se restreindra à l'optimisation des approvisionnements sur une seule période[1] de temps.
- On doit avoir conscience que **la stratégie** de gestion de stock dépend de l'objectif visé par l'entreprise. (rentabilité, fidélisation, satisfaction clients...)
- Dans tous les cas, **la stratégie** du gestionnaire sur les quantités à commander, est basée sur une prédiction du futur à travers l'histoire écoulée. La connaissance du passé fournit une base de modélisation (aléatoire ou pas) de la demande.

[1] La période se définit comme la durée entre 2 commandes chez le fournisseur.

Généralités

- Il existe divers modèles pour répondre à la question de la gestion de stock :
  Wilson, Séries Chronologiques, Probabiliste/Statistique...
  On étudiera ici, modestement et seulement, une approche probabiliste.
- Dans ce cours, on se restreindra à l'optimisation des approvisionnements sur une seule période[1] de temps.
- On doit avoir conscience que **la stratégie** de gestion de stock dépend de l'objectif visé par l'entreprise. (rentabilité, fidélisation, satisfaction clients...)
- Dans tous les cas, **la stratégie** du gestionnaire sur les quantités à commander, est basée sur une prédiction du futur à travers l'histoire écoulée. La connaissance du passé fournit une base de modélisation (aléatoire ou pas) de la demande.

[1] La période se définit comme la durée entre 2 commandes chez le fournisseur.

Généralités suite

$\Rightarrow$ L'observation et le recueil d'informations, sont donc des clefs dans la prévision et l'estimation !

"Tout le monde sait et dit que celui qui observe sans idée, observe en vain"
Elements de philosophie, Alain (1868-1951)

Généralités suite

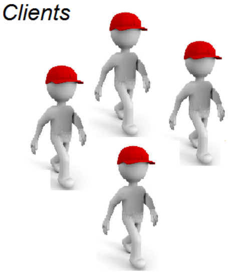
$\Rightarrow$ L'observation et le recueil d'informations, sont donc des clefs dans la prévision et l'estimation !

> *"Tout le monde sait et dit que celui qui observe sans idée, observe en vain"*
> *Elements de philosophie, Alain (1868-1951)*

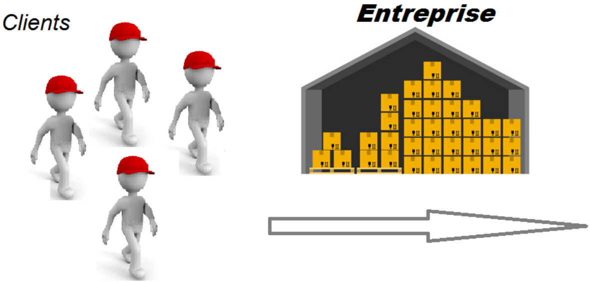
1. Types de problèmes abordés et formalisme mathématique
   - Introduction sur la gestion de stock
   - Stock pour satisfaire la demande: Pb 1
   - Stock pour optimiser le fonctionnement: Pb 2
2. Elements de réponse
   - Modélisation aléatoire de la demande D
   - Retour au Pb 2
   - Retour au Pb 1
3. Approfondissements possibles.

Un schéma

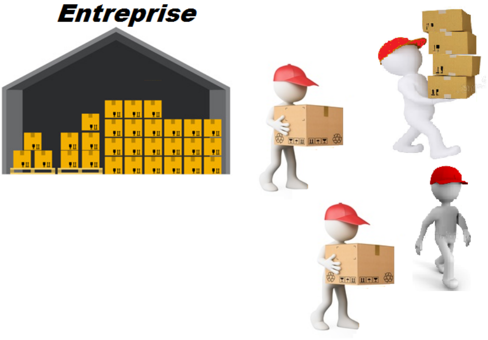
Un schéma



Un schéma



Un schéma



Dans cette amorce de présentation du processus de gestion de stock, nous nous cantonnerons à deux problématiques:

- Déterminer le stock pour satisfaire à la demande.

Dans cette amorce de présentation du processus de gestion de stock, nous nous cantonnerons à deux problématiques:

- Déterminer le stock pour satisfaire à la demande.
- Déterminer le stock dans le but de minimiser le coût total de l'entreprise.

Dans cette amorce de présentation du processus de gestion de stock, nous nous cantonnerons à deux problématiques:

- Déterminer le stock pour satisfaire à la demande.
- Déterminer le stock dans le but de minimiser le coût total de l'entreprise.

Stock pour satisfaire la demande

- Notons D la variable aléatoire modélisant la demande d'un produit sur une période dans l'entreprise. (D représente donc le nombre de clients qui se sont présentés à l'entreprise et désirant acheter le produit.)

Stock pour satisfaire la demande

- Notons D la variable aléatoire modélisant la demande d'un produit sur une période dans l'entreprise. (D représente donc le nombre de clients qui se sont présentés à l'entreprise et désirant acheter le produit.)
- Notons S la valeur du stock.

Stock pour satisfaire la demande

- Notons D la variable aléatoire modélisant la demande d'un produit sur une période dans l'entreprise. (D représente donc le nombre de clients qui se sont présentés à l'entreprise et désirant acheter le produit.)
- Notons S la valeur du stock.

Definition

Soit $0 < \alpha < 1$. Satisfaire la demande avec le taux de probabilité $1 - \alpha$, signifie : trouver S tel que,

$$\mathbb{P}(D \leq S) = 1 - \alpha$$

Stock pour satisfaire la demande

- Notons D la variable aléatoire modélisant la demande d'un produit sur une période dans l'entreprise. (D représente donc le nombre de clients qui se sont présentés à l'entreprise et désirant acheter le produit.)
- Notons S la valeur du stock.

Definition

Soit $0 < \alpha < 1$. Satisfaire la demande avec le taux de probabilité $1 - \alpha$, signifie : trouver S tel que,

$$\mathbb{P}(D \leq S) = 1 - \alpha$$

Reste bien evidemment à connaître (ou approcher) loi de D...

Stock pour satisfaire la demande

- Notons D la variable aléatoire modélisant la demande d'un produit sur une période dans l'entreprise. (D représente donc le nombre de clients qui se sont présentés à l'entreprise et désirant acheter le produit.)
- Notons S la valeur du stock.

Definition

Soit $0 < \alpha < 1$. Satisfaire la demande avec le taux de probabilité $1-\alpha$, signifie : trouver S tel que,

$$\mathbb{P}(D \leq S) = 1 - \alpha$$

Reste bien evidemment à connaître (ou approcher) loi de D... Si tel est le cas, la valeur de S s'obtientra facilement à l'aide de la fonction de répartition de D.

Stock pour satisfaire la demande

- Notons D la variable aléatoire modélisant la demande d'un produit sur une période dans l'entreprise. (D représente donc le nombre de clients qui se sont présentés à l'entreprise et désirant acheter le produit.)
- Notons S la valeur du stock.

Definition

Soit $0 < \alpha < 1$. Satisfaire la demande avec le taux de probabilité $1 - \alpha$, signifie : trouver S tel que,

$$\mathbb{P}(D \leq S) = 1 - \alpha$$

Reste bien evidemment à connaître (ou approcher) loi de D... Si tel est le cas, la valeur de S s'obtientra facilement à l'aide de la fonction de répartition de D.

Stock dans le but de minimiser le coût total de l'entreprise

Rappelons que nous nous plaçons dans le modèle (simpliste), où nous commandons un seul type de produit au début d'une période de temps.

[2]Dans le cas d'une reprise des articles par le fournisseur, c_S peut être négatif, mais inférieur au prix c. On supposera donc $c_S > -c$.

Stock dans le but de minimiser le coût total de l'entreprise

Rappelons que nous nous plaçons dans le modèle (simpliste), où nous commandons un seul type de produit au début d'une période de temps.

- Au début de la période, le gestionnaire commande une quantité q du produit, facturée au coût unitaire $c > 0$ par le fournisseur.

[2] Dans le cas d'une reprise des articles par le fournisseur, c_S peut être négatif, mais inférieur au prix c. On supposera donc $c_S > -c$.

Stock dans le but de minimiser le coût total de l'entreprise

Rappelons que nous nous plaçons dans le modèle (simpliste), où nous commandons un seul type de produit au début d'une période de temps.

- Au début de la période, le gestionnaire commande une quantité q du produit, facturée au coût unitaire $c > 0$ par le fournisseur.
- La demande est toujours modélisée par une variable aléatoire D.

[2] Dans le cas d'une reprise des articles par le fournisseur, c_S peut être négatif, mais inférieur au prix c. On supposera donc $c_S > -c$.

Stock dans le but de minimiser le coût total de l'entreprise

Rappelons que nous nous plaçons dans le modèle (simpliste), où nous commandons un seul type de produit au début d'une période de temps.

- Au début de la période, le gestionnaire commande une quantité q du produit, facturée au coût unitaire $c > 0$ par le fournisseur.
- La demande est toujours modélisée par une variable aléatoire D.
- A l'issue de la période, 3 cas de figure peuvent se présenter:

[2] Dans le cas d'une reprise des articles par le fournisseur, c_S peut être négatif, mais inférieur au prix c. On supposera donc $c_S > -c$.

Stock dans le but de minimiser le coût total de l'entreprise

Rappelons que nous nous plaçons dans le modèle (simpliste), où nous commandons un seul type de produit au début d'une période de temps.

- Au début de la période, le gestionnaire commande une quantité q du produit, facturée au coût unitaire $c > 0$ par le fournisseur.
- La demande est toujours modélisée par une variable aléatoire D.
- A l'issue de la période, 3 cas de figure peuvent se présenter:
  - $q = D$. Le gestionnaire a vu juste !

[2] Dans le cas d'une reprise des articles par le fournisseur, c_S peut être négatif, mais inférieur au prix c. On supposera donc $c_S > -c$.

Stock dans le but de minimiser le coût total de l'entreprise

Rappelons que nous nous plaçons dans le modèle (simpliste), où nous commandons un seul type de produit au début d'une période de temps.

- Au début de la période, le gestionnaire commande une quantité q du produit, facturée au coût unitaire $c > 0$ par le fournisseur.
- La demande est toujours modélisée par une variable aléatoire D.
- A l'issue de la période, 3 cas de figure peuvent se présenter:
  - $q = D$. Le gestionnaire a vu juste !
  - $q > D$. Il y a donc $q - D$ produits en surplus,

[2] Dans le cas d'une reprise des articles par le fournisseur, c_S peut être négatif, mais inférieur au prix c. On supposera donc $c_S > -c$.

Stock dans le but de minimiser le coût total de l'entreprise

Rappelons que nous nous plaçons dans le modèle (simpliste), où nous commandons un seul type de produit au début d'une période de temps.

- Au début de la période, le gestionnaire commande une quantité q du produit, facturée au coût unitaire $c > 0$ par le fournisseur.
- La demande est toujours modélisée par une variable aléatoire D.
- A l'issue de la période, 3 cas de figure peuvent se présenter:
  - $q = D$. Le gestionnaire a vu juste !
  - $q > D$. Il y a donc $q - D$ produits en surplus, qui doivent donc être stockés. Aussi, on associe un coût unitaire[2] c_S qui correspond à ce stockage sur la période.

[2]Dans le cas d'une reprise des articles par le fournisseur, c_S peut être négatif, mais inférieur au prix c. On supposera donc $c_S > -c$.

Stock dans le but de minimiser le coût total de l'entreprise

Rappelons que nous nous plaçons dans le modèle (simpliste), où nous commandons un seul type de produit au début d'une période de temps.

- Au début de la période, le gestionnaire commande une quantité q du produit, facturée au coût unitaire $c > 0$ par le fournisseur.
- La demande est toujours modélisée par une variable aléatoire D.
- A l'issue de la période, 3 cas de figure peuvent se présenter:
  - $q = D$. Le gestionnaire a vu juste !
  - $q > D$. Il y a donc $q - D$ produits en surplus, qui doivent donc être stockés. Aussi, on associe un coût unitaire[2] c_S qui correspond à ce stockage sur la période.
  - $q < D$. Il y a dont $D - q$ produits manquants.

[2] Dans le cas d'une reprise des articles par le fournisseur, c_S peut être négatif, mais inférieur au prix c. On supposera donc $c_S > -c$.

Stock dans le but de minimiser le coût total de l'entreprise

Rappelons que nous nous plaçons dans le modèle (simpliste), où nous commandons un seul type de produit au début d'une période de temps.

- Au début de la période, le gestionnaire commande une quantité q du produit, facturée au coût unitaire $c > 0$ par le fournisseur.
- La demande est toujours modélisée par une variable aléatoire D.
- A l'issue de la période, 3 cas de figure peuvent se présenter:
  - $q = D$. Le gestionnaire a vu juste !
  - $q > D$. Il y a donc $q - D$ produits en surplus, qui doivent donc être stockés. Aussi, on associe un coût unitaire[2] c_S qui correspond à ce stockage sur la période.
  - $q < D$. Il y a dont $D - q$ produits manquants. Ces demandes non satisfaites tendent à détériorer l'image du gestionnaire. Aussi, on associe un coût unitaire $c_M > 0$ qui rend compte de ce mécanisme.

[2] Dans le cas d'une reprise des articles par le fournisseur, c_S peut être négatif, mais inférieur au prix c. On supposera donc $c_S > -c$.

Stock dans le but de minimiser le coût total de l'entreprise

Rappelons que nous nous plaçons dans le modèle (simpliste), où nous commandons un seul type de produit au début d'une période de temps.

- Au début de la période, le gestionnaire commande une quantité q du produit, facturée au coût unitaire $c > 0$ par le fournisseur.
- La demande est toujours modélisée par une variable aléatoire D.
- A l'issue de la période, 3 cas de figure peuvent se présenter:
  - $q = D$. Le gestionnaire a vu juste !
  - $q > D$. Il y a donc $q - D$ produits en surplus, qui doivent donc être stockés. Aussi, on associe un coût unitaire[2] c_S qui correspond à ce stockage sur la période.
  - $q < D$. Il y a dont $D - q$ produits manquants. Ces demandes non satisfaites tendent à détériorer l'image du gestionnaire. Aussi, on associe un coût unitaire $c_M > 0$ qui rend compte de ce mécanisme.

[2] Dans le cas d'une reprise des articles par le fournisseur, c_S peut être négatif, mais inférieur au prix c. On supposera donc $c_S > -c$.

Stock dans le but de minimiser le coût total de l'entreprise

Ainsi, l'espérance du coût total pour l'entreprise pour un achat de q produits, est:

$$\begin{aligned} f(q) &= \text{coût des q articles} \\ &\quad + \text{coût moyen du stockage (si surplus)} \\ &\quad + \text{coût moyen de détérioration de l'image (si demande non satisfaite)}, \end{aligned}$$

Stock dans le but de minimiser le coût total de l'entreprise

Ainsi, l'espérance du coût total pour l'entreprise pour un achat de q produits, est:

$$\begin{aligned} f(q) \quad = \quad & \text{coût des q articles} \\ & \qquad + \text{coût moyen du stockage (si surplus)} \\ & \qquad\qquad + \text{coût moyen de détérioration de} \\ & \qquad\qquad\quad \text{l'image (si demande non satisfaite)}, \end{aligned}$$

Stock dans le but de minimiser le coût total de l'entreprise

Ainsi, l'espérance du coût total pour l'entreprise pour un achat de q produits, est:

$$\begin{aligned} f(q) &= \text{coût des q articles} \\ &\qquad + \text{coût moyen du stockage (si surplus)} \\ &\qquad\qquad + \text{coût moyen de détérioration de l'image (si demande non satisfaite)}, \\ &= cq + c_S \mathbb{E}[(q-D)_+] + c_M \mathbb{E}[(D-q)_+]. \end{aligned}$$

La notation $(x)_+$ correspond à la partie positive de x. On a

$$(x)_+ = \begin{cases} x & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Par ex, $(4)_+ = 4$ et $(-3)_+ = 0$.

Stock dans le but de minimiser le coût total de l'entreprise

Ainsi, l'espérance du coût total pour l'entreprise pour un achat de q produits, est:

$$\begin{aligned} f(q) &= \text{coût des q articles} \\ &\qquad + \text{coût moyen du stockage (si surplus)} \\ &\qquad\qquad + \text{coût moyen de détérioration de} \\ &\qquad\qquad\quad \text{l'image (si demande non satisfaite)}, \\ &= cq + c_S\mathbb{E}[(q-D)_+] + c_M\mathbb{E}[(D-q)_+]. \end{aligned}$$

La notation $(x)_+$ correspond à la partie positive de x. On a

$$(x)_+ = \begin{cases} x & \text{si} \quad x > 0 \\ 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases} \tag{1}$$

Par ex, $(4)_+ = 4$ et $(-3)_+ = 0$.

Stock dans le but de minimiser le coût total de l'entreprise

Ainsi, l'espérance du coût total pour l'entreprise pour un achat de q produits, est:

$$
\begin{aligned}
f(q) &= \text{coût des q articles} \\
&\qquad + \text{coût moyen du stockage (si surplus)} \\
&\qquad\qquad + \text{coût moyen de détérioration de} \\
&\qquad\qquad\quad \text{l'image (si demande non satisfaite),} \\
&= cq + c_S\mathbb{E}[(q-D)_+] + c_M\mathbb{E}[(D-q)_+].
\end{aligned}
$$

Le gestionnaire doit donc minimiser ce coût total moyen.

ie : Trouver q pour que $f(q)$ soit minimale !

Référence relative à cette sous section:

Modèles aléatoires. Applications aux sciences de l'ingénieur et du vivant. Delmas Jean-François, Jourdain Benjamin.

- Dans ces 2 orientations de gestion de stock, la modélisation de la demande D est fondamentale ! Avoir une *loi de D qui est la plus proche de la réalité*, permettra en effet de calculer la valeur du stock S la plus juste.
- La plupart du temps, nous n'avons pas accès directement à la loi de D.

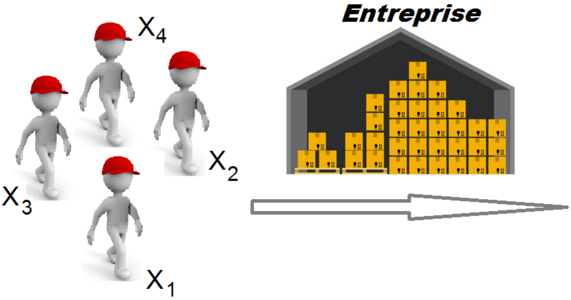
- Dans ces 2 orientations de gestion de stock, la modélisation de la demande D est fondamentale ! Avoir une *loi de D qui est la plus proche de la réalité*, permettra en effet de calculer la valeur du stock S la plus juste.
- La plupart du temps, nous n'avons pas accès directement à la loi de D.
  - En revanche, à l'aide d'observations, la loi d'achat d'un client est une donnée qu'il semble réaliste d'obtenir.

- Dans ces 2 orientations de gestion de stock, la modélisation de la demande D est fondamentale ! Avoir une *loi de D qui est la plus proche de la réalité*, permettra en effet de calculer la valeur du stock S la plus juste.
- La plupart du temps, nous n'avons pas accès directement à la loi de D.
  - En revanche, à l'aide d'observations, la loi d'achat d'un client est une donnée qu'il semble réaliste d'obtenir.
  - Or la demande générale D, est la somme des demandes de tous les clients. Le Théorème Central Limite (TCL) permet (...) justement d'estimer la loi d'une somme de variables aléatoires.

- Dans ces 2 orientations de gestion de stock, la modélisation de la demande D est fondamentale ! Avoir une *loi de D qui est la plus proche de la réalité*, permettra en effet de calculer la valeur du stock S la plus juste.
- La plupart du temps, nous n'avons pas accès directement à la loi de D.
  - En revanche, à l'aide d'observations, la loi d'achat d'un client est une donnée qu'il semble réaliste d'obtenir.
  - Or la demande générale D, est la somme des demandes de tous les clients. Le Théorème Central Limite (TCL) permet (...) justement d'estimer la loi d'une somme de variables aléatoires.

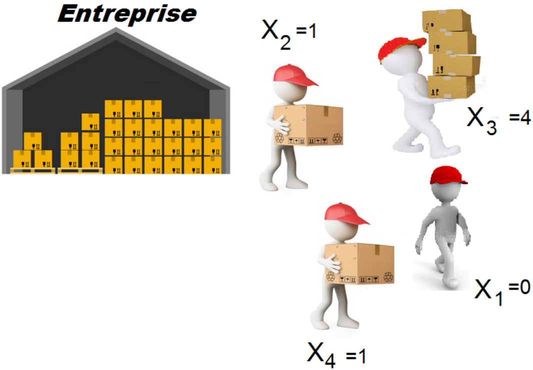
Modélisation de la demande D

Modélisation de la demande D

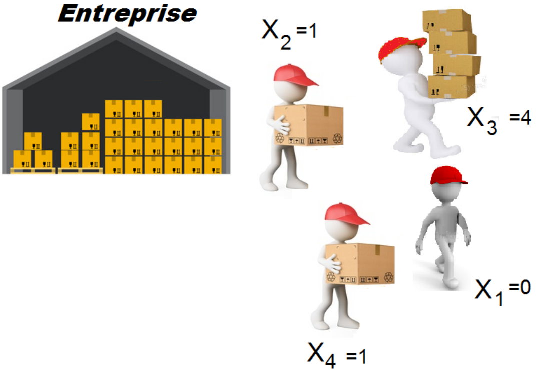


Au client numéro i, on associe une variable aléatoire X_i *égale au nombre d'articles achetés par ce client.*

Modélisation de la demande D



Modélisation de la demande D



La demande **D** est donnée par :

$$\mathbf{D} = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$$

$$\mathbf{= 6}$$

Modélisation de la demande D

Notons n, le nombre de clients cotoyant l'entreprise. Pour le client i, $(1 \leq i \leq n)$ on définit donc une variable X_i comme étant égale au nombre[3] d'articles achetés par ce client. Ainsi,

$$\begin{aligned} D &= X_1 + X_2 + ... + X_n, \\ &= \sum_{i=1..n} X_i. \end{aligned}$$

[3] La variable X_i peut ne pas être un entier, comme par exemple dans le cas d'achat de litres de carburant.

Modélisation de la demande D

Notons n, le nombre de clients cotoyant l'entreprise. Pour le client i, ($1 \leq i \leq n$) on définit donc une variable X_i comme étant égale au nombre[3] d'articles achetés par ce client. Ainsi,

$$\begin{aligned} D &= X_1 + X_2 + ... + X_n, \\ &= \sum_{i=1..n} X_i. \end{aligned}$$

[3] La variable X_i peut ne pas être un entier, comme par exemple dans le cas d'achat de litres de carburant.

Intervention du TCL

Théorème (TCL)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. réelles indépendantes et de même loi, de moyenne m et d'écart type σ. Notons $\bar{X}_n = \frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$. Alors,

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - m)}{\sigma} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0;1).$$

Intervention du TCL

Théorème (TCL)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. réelles indépendantes et de même loi, de moyenne m et d'écart type σ. Notons $\bar{X}_n = \frac{X_1+...+X_n}{n}$. Alors,

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - m)}{\sigma} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0;1).$$

Autres formulations: pour n grand, on a :

$$\bar{X}_n \overset{\mathcal{L}}{\approx} \mathcal{N}(m; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}), \text{ ou bien encore } \sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\mathcal{L}}{\approx} \mathcal{N}(mn; \sigma\sqrt{n}).$$

Intervention du TCL

Théorème (TCL)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. réelles indépendantes et de même loi, de moyenne m et d'écart type σ. Notons $\bar{X}_n = \frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$. Alors,

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - m)}{\sigma} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0;1).$$

<u>Autres formulations:</u> pour n grand, on a :

$$\bar{X}_n \overset{\mathcal{L}}{\approx} \mathcal{N}(m;\frac{\sigma}{\sqrt{n}}), \text{ ou bien encore } \sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\mathcal{L}}{\approx} \mathcal{N}(mn;\sigma\sqrt{n}).$$

-Attention, le TCL indique une convergence en loi !

Intervention du TCL

Théorème (TCL)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. réelles indépendantes et de même loi, de moyenne m et d'écart type σ. Notons $\bar{X}_n = \frac{X_1+\ldots+X_n}{n}$. Alors,

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - m)}{\sigma} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0;1).$$

Autres formulations: pour n grand, on a :

$$\bar{X}_n \overset{\mathcal{L}}{\approx} \mathcal{N}(m;\frac{\sigma}{\sqrt{n}}), \text{ ou bien encore } \sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\mathcal{L}}{\approx} \mathcal{N}(mn;\sigma\sqrt{n}).$$

-Attention, le TCL indique une convergence en loi !

Exemple d'application du TCL à la demande D.

Appliquons le TCL aux v.a X_i (nombre d'articles achétés par le client i), de moyenne m et d'écart type σ. On obtient:

$$D = \sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(mn; \sigma\sqrt{n}).$$

Ainsi, pour n grand ($n \geq 30$), on pourra approximer la loi de D par une $\mathcal{N}(mn; \sigma\sqrt{n})$.

Exemple d'application du TCL à la demande D.

Appliquons le TCL aux v.a X_i (nombre d'articles achétés par le client i), de moyenne m et d'écart type σ. On obtient:

$$D = \sum_{i=1}^{n} X_i \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(mn; \sigma\sqrt{n}).$$

Ainsi, pour n grand ($n \geq 30$), on pourra approximer la loi de D par une $\mathcal{N}(mn; \sigma\sqrt{n})$.

1. Types de problèmes abordés et formalisme mathématique
   - Introduction sur la gestion de stock
   - Stock pour satisfaire la demande: Pb 1
   - Stock pour optimiser le fonctionnement: Pb 2
2. Elements de réponse
   - Modélisation aléatoire de la demande D
   - Retour au Pb 2
   - Retour au Pb 1
3. Approfondissements possibles.

Calcul du stock pour minimiser le coût total de l'entreprise

Rappelons les notations:

- c représente le coût d'achat unitaire auprès du fournisseur.

Calcul du stock pour minimiser le coût total de l'entreprise

Rappelons les notations:

- c représente le coût d'achat unitaire auprès du fournisseur.
- c_S représente le coût unitaire en stockage du surplus.

Calcul du stock pour minimiser le coût total de l'entreprise

Rappelons les notations:

- c représente le coût d'achat unitaire auprès du fournisseur.
- c_S représente le coût unitaire en stockage du surplus.
- c_M représente le coût unitaire d'un produit manquant (client potentiellement perdu...)

Calcul du stock pour minimiser le coût total de l'entreprise

Rappelons les notations:

- c représente le coût d'achat unitaire auprès du fournisseur.
- c_S représente le coût unitaire en stockage du surplus.
- c_M représente le coût unitaire d'un produit manquant (client potentiellement perdu...)

Stock dans le but de minimiser le coût total de l'entreprise

La propriété suivante répond au Pb 2:

Proposition

- *Supposons que la demande D soit une variable entière.*
- *Supposons que $c < c_M$.*

Stock dans le but de minimiser le coût total de l'entreprise

La propriété suivante répond au Pb 2:

Proposition

- *Supposons que la demande D soit une variable entière.*
- *Supposons que* $c < c_M$.
- *Posons S le plus petit entier tel que* $\mathbb{P}(D \leq S) \geq \frac{c_M - c}{c_M + c_S}$.

Stock dans le but de minimiser le coût total de l'entreprise

La propriété suivante répond au Pb 2:

Proposition

- *Supposons que la demande D soit une variable entière.*
- *Supposons que $c < c_M$.*
- *Posons S le plus petit entier tel que $\mathbb{P}(D \leq S) \geq \frac{c_M - c}{c_M + c_S}$.*

Alors commander S est optimal.

Stock dans le but de minimiser le coût total de l'entreprise

La propriété suivante répond au Pb 2:

Proposition

- *Supposons que la demande D soit une variable entière.*
- *Supposons que $c < c_M$.*
- *Posons S le plus petit entier tel que* $\mathbb{P}(D \leq S) \geq \frac{c_M - c}{c_M + c_S}$.

Alors commander S est optimal.

-L'hypothèse $c < c_M$ se justifie par des considérations économiques. Le coût c_M est la somme du prix d'achat unitaire de l'article et du coût en "termes d'image de marque erodée".

Stock dans le but de minimiser le coût total de l'entreprise

La propriété suivante répond au Pb 2:

Proposition

- *Supposons que la demande D soit une variable entière.*
- *Supposons que $c < c_M$.*
- *Posons S le plus petit entier tel que $\mathbb{P}(D \leq S) \geq \frac{c_M - c}{c_M + c_S}$.*

Alors commander S est optimal.

-L'hypothèse $c < c_M$ se justifie par des considérations économiques. Le coût c_M est la somme du prix d'achat unitaire de l'article et du coût en "termes d'image de marque erodée".

-La valeur de S s'obtiendra donc (souvent) par lecture inverse de la table de la fonction de répartition de la loi de D.

Stock dans le but de minimiser le coût total de l'entreprise

La propriété suivante répond au Pb 2:

Proposition

- *Supposons que la demande D soit une variable entière.*
- *Supposons que $c < c_M$.*
- *Posons S le plus petit entier tel que $\mathbb{P}(D \leq S) \geq \frac{c_M - c}{c_M + c_S}$.*

Alors commander S est optimal.

-L'hypothèse $c < c_M$ se justifie par des considérations économiques. Le coût c_M est la somme du prix d'achat unitaire de l'article et du coût en "termes d'image de marque erodée".
-La valeur de S s'obtiendra donc (souvent) par lecture inverse de la table de la fonction de répartition de la loi de D.

-Si D n'est pas entière, on considérera que la valeur de S définie précédemment en remplaçant "plus petit entier" par "plus petit réel" convient.

Stock dans le but de minimiser le coût total de l'entreprise

La propriété suivante répond au Pb 2:

Proposition

- *Supposons que la demande D soit une variable entière.*
- *Supposons que $c < c_M$.*
- *Posons S le plus petit entier tel que $\mathbb{P}(D \leq S) \geq \frac{c_M - c}{c_M + c_S}$.*

Alors commander S est optimal.

-L'hypothèse $c < c_M$ se justifie par des considérations économiques. Le coût c_M est la somme du prix d'achat unitaire de l'article et du coût en "termes d'image de marque erodée".
-La valeur de S s'obtiendra donc (souvent) par lecture inverse de la table de la fonction de répartition de la loi de D.

-Si D n'est pas entière, on considérera que la valeur de S définie précédemment en remplaçant "plus petit entier" par "plus petit réel" convient.

Exemple énoncé

Exemple

Un magasin achéte des articles à son fournisseur au prix de 120 *euros*. Après quelques observations, le gérant estime que la demande D sur une période a pour loi :

k	25	30	35	40	45	55
$\mathbb{P}(D = k)$	0,15	0.1	0,25	0,35	0,1	0,05

Par ailleurs, le gérant évalue le coût unitaire d'un manquant (vente ratée par manque de stock) à 200 *euros*. Le coût de stockage unitaire d'invendus sur une période s'élève à 10 *euros*.

Déterminer le stock à commander en début de période pour minimiser en moyenne le coût de ce magasin ?

Exemple énoncé

Exemple

Un magasin achéte des articles à son fournisseur au prix de 120 *euros*. Après quelques observations, le gérant estime que la demande D sur une période a pour loi :

k	25	30	35	40	45	55
$\mathbb{P}(D = k)$	0,15	0.1	0,25	0,35	0,1	0,05

Par ailleurs, le gérant évalue le coût unitaire d'un manquant (vente ratée par manque de stock) à 200 *euros*. Le coût de stockage unitaire d'invendus sur une période s'élève à 10 *euros*.

Déterminer le stock à commander en début de période pour minimiser en moyenne le coût de ce magasin ?

Solution exemple

- Par l'énoncé, on a immédiatement $c = 120,\ c_S = 10$ et $c_M = 200$.
- Les conditions $c_M > c$ et $c_S > -c$ sont satisfaites.

Solution exemple

- Par l'énoncé, on a immédiatement $c = 120,\ c_S = 10$ et $c_M = 200$.
- Les conditions $c_M > c$ et $c_S > -c$ sont satisfaites.
- Le ration $\frac{c_M - c}{c_M + c_S}$ est égal à $\approx 0,38$.

Solution exemple

- Par l'énoncé, on a immédiatement $c = 120,\ c_S = 10$ et $c_M = 200$.
- Les conditions $c_M > c$ et $c_S > -c$ sont satisfaites.
- Le ration $\frac{c_M - c}{c_M + c_S}$ est égal à $\approx 0,38$.
- Par la propriété du cours, on cherche donc le plus petit réel S tel que :

$$\mathbb{P}(D \leq S) \geq 0.38.$$

Solution exemple

- Par l'énoncé, on a immédiatement $c = 120, \; c_S = 10$ et $c_M = 200$.
- Les conditions $c_M > c$ et $c_S > -c$ sont satisfaites.
- Le ration $\frac{c_M - c}{c_M + c_S}$ est égal à $\approx 0,38$.
- Par la propriété du cours, on cherche donc le plus petit réel S tel que :

$$\mathbb{P}(D \leq S) \geq 0.38.$$

- A l'aide de la loi de D:

k	25	30	35	40	45	55
$\mathbb{P}(D = k)$	0,15	0.1	0,25	0,35	0,1	0,05

, on en déduit que le stock optimal est $S = 35$.

Solution exemple

- Par l'énoncé, on a immédiatement $c = 120, \ c_S = 10$ et $c_M = 200$.
- Les conditions $c_M > c$ et $c_S > -c$ sont satisfaites.
- Le ration $\frac{c_M - c}{c_M + c_S}$ est égal à $\approx 0,38$.
- Par la propriété du cours, on cherche donc le plus petit réel S tel que :

$$\mathbb{P}(D \leq S) \geq 0.38.$$

- A l'aide de la loi de D:

k	25	30	35	40	45	55
$\mathbb{P}(D = k)$	0,15	0.1	0,25	0,35	0,1	0,05

, on en déduit que le stock optimal est $S = 35$.

1. Types de problèmes abordés et formalisme mathématique
   - Introduction sur la gestion de stock
   - Stock pour satisfaire la demande: Pb 1
   - Stock pour optimiser le fonctionnement: Pb 2
2. Elements de réponse
   - Modélisation aléatoire de la demande D
   - Retour au Pb 2
   - Retour au Pb 1
3. Approfondissements possibles.

Rappelons, qu'étant donné un réel α, $(0 < \alpha < 1)$, satisfaire la demande avec le taux $1 - \alpha$ signifie que l'on cherche un stock S tel que :

$$\mathbb{P}(D \leq S) = 1 - \alpha.$$

Lorsque la loi de D est connue ou simple

Il suffit d'utliser la loi de D (table par ex) pour y lire la valeur de S correspondante.

Lorsque la loi de D est connue ou simple

Il suffit d'utliser la loi de D (table par ex) pour y lire la valeur de S correspondante. Reprenons l'exemple précédent.

Exemple

Un magasin achéte des articles à son fournisseur au prix de 120 *euros*. Après quelques observations, le gérant estime que la demande D sur une période a pour loi :

k	25	30	35	40	45	55
$\mathbb{P}(D = k)$	0,15	0.1	0,25	0,35	0,1	0,05

Déterminez le stock S pour satisfaire la demande au taux de $0,95$.

Lorsque la loi de D est connue ou simple

Il suffit d'utliser la loi de D (table par ex) pour y lire la valeur de S correspondante. Reprenons l'exemple précédent.

Exemple

Un magasin achéte des articles à son fournisseur au prix de 120 *euros*. Après quelques observations, le gérant estime que la demande D sur une période a pour loi :

k	25	30	35	40	45	55
$\mathbb{P}(D = k)$	0,15	0.1	0,25	0,35	0,1	0,05

Déterminez le stock S pour satisfaire la demande au taux de $0,95$.

- On cherche donc (le plus petit) S tel que $\mathbb{P}(D \leq S) \geq 0,95$.
- A l'aide de la loi de D,

k	25	30	35	40	45	55
$\mathbb{P}(D = k)$	0,15	0.1	0,25	0,35	0,1	0,05

,

on déduit que $S = 45$ est optimal pour satisfaire la demande à 95%.

- On cherche donc (le plus petit) S tel que $\mathbb{P}(D \leq S) \geq 0,95$.
- A l'aide de la loi de D,

k	25	30	35	40	45	55
$\mathbb{P}(D = k)$	0,15	0.1	0,25	0,35	0,1	0,05

,

on déduit que $S = 45$ est optimal pour satisfaire la demande à 95%.

Remarques:

- les prix n'ont aucune incidence dans cette modélisation !

- On cherche donc (le plus petit) S tel que $\mathbb{P}(D \leq S) \geq 0,95$.
- A l'aide de la loi de D,

k	25	30	35	40	45	55
$\mathbb{P}(D = k)$	0,15	0.1	0,25	0,35	0,1	0,05

, on déduit que $S = 45$ est optimal pour satisfaire la demande à 95%.

Remarques:

- les prix n'ont aucune incidence dans cette modélisation !

- notez comment les valeurs des stocks à commander sont complétement différentes en fonction ce que l'on cherche à optimiser !

- On cherche donc (le plus petit) S tel que $\mathbb{P}(D \leq S) \geq 0,95$.
- A l'aide de la loi de D,

k	25	30	35	40	45	55
$\mathbb{P}(D = k)$	0,15	0.1	0,25	0,35	0,1	0,05

,

on déduit que $S = 45$ est optimal pour satisfaire la demande à 95%.

Remarques:
- les prix n'ont aucune incidence dans cette modélisation !
- notez comment les valeurs des stocks à commander sont complétement différentes en fonction ce que l'on cherche à optimiser !

Cas général: la demande générale D s'exprime comme somme de demandes de chaque consommateur

Supposons que l'on connaisse la loi X_i de chaque client, on utilise alors le TCL pour approcher la loi de D.

Cas général: la demande générale D s'exprime comme somme de demandes de chaque consommateur

Supposons que l'on connaisse la loi X_i de chaque client, on utilise alors le TCL pour approcher la loi de D.

Cas général: la demande générale D s'exprime comme somme de demandes de chaque consommateur

Supposons que l'on connaisse la loi X_i de chaque client, on utilise alors le TCL pour approcher la loi de D.

Exemple énoncé

Exemple

Un boulanger évalue que le nombre X de baguettes achetées par un client, est distribué suivant la loi suivante :

k	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(X = k)$	0,25	0,45	0,14	0,1	0,04	0,02

Sachant que la fréquentation quotidienne est de $n = 200$ clients, combien de baguettes le boulanger doit il cuire le matin pour satisfaire la demande avec probabilité $0,95$?

Solution exemple

- Pour $1 \leq i \leq 200$, on note X_i le nombre de baguettes achetées par le client i. Après calculs, on a :

$$\mathbb{E}(X_i) = 2,29 \quad et \quad \sigma(X_i) \approx 0,9.$$

- La demande quotidienne s'exprime comme $D = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Solution exemple

- Pour $1 \leq i \leq 200$, on note X_i le nombre de baguettes achetées par le client i. Après calculs, on a :

$$\mathbb{E}(X_i) = 2,29 \quad et \quad \sigma(X_i) \approx 0,9.$$

- La demande quotidienne s'exprime comme $D = \sum_{i=1}^{n} X_i$
- $n = 200 \geq 30$, donc par le TCL, on peut approcher la loi de D par une $\mathcal{N}(2,29n; 0,9\sqrt{n})$. C'est à dire une $\mathcal{N}(458; 12,8)$.

Solution exemple

- Pour $1 \leq i \leq 200$, on note X_i le nombre de baguettes achetées par le client i. Après calculs, on a :
$$\mathbb{E}(X_i) = 2,29 \quad et \quad \sigma(X_i) \approx 0,9.$$
- La demande quotidienne s'exprime comme $D = \sum_{i=1}^{n} X_i$
- $n = 200 \geq 30$, donc par le TCL, on peut approcher la loi de D par une $\mathcal{N}(2,29n; 0,9\sqrt{n})$. C'est à dire une $\mathcal{N}(458; 12,8)$.
- La question revient donc à trouver S tel que $\mathbb{P}(Y \leq S) = 0,95$ où $Y \sim \mathcal{N}(458; 12,8)$.

Solution exemple

- Pour $1 \leq i \leq 200$, on note X_i le nombre de baguettes achetées par le client i. Après calculs, on a :

$$\mathbb{E}(X_i) = 2,29 \ \ et \ \ \sigma(X_i) \approx 0,9.$$

- La demande quotidienne s'exprime comme $D = \sum_{i=1}^{n} X_i$
- $n = 200 \geq 30$, donc par le TCL, on peut approcher la loi de D par une $\mathcal{N}(2,29n; 0,9\sqrt{n})$. C'est à dire une $\mathcal{N}(458; 12,8)$.
- La question revient donc à trouver S tel que $\mathbb{P}(Y \leq S) = 0,95$ où $Y \sim \mathcal{N}(458; 12,8)$.
- A l'aide des tables, on trouve $S = 480$.

Solution exemple

- Pour $1 \leq i \leq 200$, on note X_i le nombre de baguettes achetées par le client i. Après calculs, on a :
$$\mathbb{E}(X_i) = 2,29 \;\; et \;\; \sigma(X_i) \approx 0,9.$$
- La demande quotidienne s'exprime comme $D = \sum_{i=1}^{n} X_i$
- $n = 200 \geq 30$, donc par le TCL, on peut approcher la loi de D par une $\mathcal{N}(2,29n; 0,9\sqrt{n})$. C'est à dire une $\mathcal{N}(458; 12,8)$.
- La question revient donc à trouver S tel que $\mathbb{P}(Y \leq S) = 0,95$ où $Y \sim \mathcal{N}(458; 12,8)$.
- A l'aide des tables, on trouve $S = 480$.

On écrit $Y = 458 + 12,8Z$ avec $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \leq S) &= \mathbb{P}(458 + 12,8Z \leq S) \\ &= \mathbb{P}(Z \leq \frac{S-458}{12,8}).\end{aligned}$$

On écrit $Y = 458 + 12,8Z$ avec $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leq S) &= \mathbb{P}(458 + 12,8Z \leq S) \\ &= \mathbb{P}(Z \leq \frac{S-458}{12,8}). \end{aligned}$$

Si l'on veut que cette probabilité vaille $0,95$, la table 2 donne

$$\frac{S-458}{12,8} \approx 1,6449.$$

D' où $S \approx 479,06$. Ainsi, le boulanger devra cuire 480 baguettes pour satisfaire la demande avec probabilité $0,95$.

On écrit $Y = 458 + 12,8Z$ avec $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$. Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y \leq S) &= \mathbb{P}(458 + 12,8Z \leq S) \\ &= \mathbb{P}(Z \leq \frac{S-458}{12,8}). \end{aligned}$$

Si l'on veut que cette probabilité vaille $0,95$, la table 2 donne

$$\tfrac{S-458}{12,8} \approx 1,6449.$$

D' où $S \approx 479,06$. Ainsi, le boulanger devra cuire 480 baguettes pour satisfaire la demande avec probabilité $0,95$.

Cas particulier: si les $X_i \sim Bernoulli$

Dans le cas, où un client ne peut acheter qu'un seul article avec proba p ou aucun, alors les X_i ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1. La loi de D est alors une $Binomiale(n, p)$.

Cas particulier: si les $X_i \sim Bernoulli$

Dans le cas, où un client ne peut acheter qu'un seul article avec proba p ou aucun, alors les X_i ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1. La loi de D est alors une $Binomiale(n, p)$. On peut donc :

- Faire le calcul précis avec la binomiale. Calcul peu agréable lorsque n est grand !

Cas particulier: si les $X_i \sim Bernoulli$

Dans le cas, où un client ne peut acheter qu'un seul article avec proba p ou aucun, alors les X_i ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1. La loi de D est alors une $Binomiale(n, p)$. On peut donc :

- Faire le calcul précis avec la binomiale. Calcul peu agréable lorsque n est grand !
- Utiliser une loi approchée.

Cas particulier: si les $X_i \sim Bernoulli$

Dans le cas, où un client ne peut acheter qu'un seul article avec proba p ou aucun, alors les X_i ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1. La loi de D est alors une $Binomiale(n, p)$. On peut donc :

- Faire le calcul précis avec la binomiale. Calcul peu agréable lorsque n est grand !
- Utiliser une loi approchée.
  - Si n est grand et p petit (≤ 0.1), approximer la loi de D par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$.

Cas particulier: si les $X_i \sim$ *Bernoulli*

Dans le cas, où un client ne peut acheter qu'un seul article avec proba p ou aucun, alors les X_i ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1. La loi de D est alors une $Binomiale(n, p)$. On peut donc :

- Faire le calcul précis avec la binomiale. Calcul peu agréable lorsque n est grand !
- Utiliser une loi approchée.
  - Si n est grand et p petit (≤ 0.1), approximer la loi de D par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$.
  - Si n est grand et p quelconque, approximer la loi de D par une $\mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$.

Cas particulier: si les $X_i \sim$ *Bernoulli*

Dans le cas, où un client ne peut acheter qu'un seul article avec proba p ou aucun, alors les X_i ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1. La loi de D est alors une $Binomiale(n, p)$. On peut donc :

- Faire le calcul précis avec la binomiale. Calcul peu agréable lorsque n est grand !
- Utiliser une loi approchée.
  - Si n est grand et p petit (≤ 0.1), approximer la loi de D par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$.
  - Si n est grand et p quelconque, approximer la loi de D par une $\mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$.

Exemple énoncé

Exemple

Un vendeur de voitures sans permis voit passer en moyenne 10 clients par jour. Un client finit par acheter une voiture avec proba 0,3. Combien de voitures disponibles doit il avoir pour satisfaire la demande quotidienne avec proba $0,9$?

Solution exemple

- $n = 10$ n'est pas grand, donc on ne peut pas utiliser l'approximation du TCL par une loi Normale.
- La loi (précise) de la demande quotidienne D est une $Binomiale(10; 0,3)$,

Solution exemple

- $n = 10$ n'est pas grand, donc on ne peut pas utiliser l'approximation du TCL par une loi Normale.
- La loi (précise) de la demande quotidienne D est une *Binomiale*$(10; 0,3)$, que nous explicitons (valeurs arrondies):

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathbb{P}(X = k)$	0.028	0.121	0.233	0.267	0.200	0.103	0.0368	0.009	0.001	0	0
$\mathbb{P}(X \leq k)$	0.028	0.149	0.383	0.650	0.850	0.953	0.999	0.998	0.999	1	1

Rappel: $\mathbb{P}(X = k) = \binom{10}{k} 0,3^k 0,7^{10-k}$

Solution exemple

- $n = 10$ n'est pas grand, donc on ne peut pas utiliser l'approximation du TCL par une loi Normale.
- La loi (précise) de la demande quotidienne D est une *Binomiale*$(10; 0,3)$, que nous explicitons (valeurs arrondies):

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathbb{P}(X = k)$	0.028	0.121	0.233	0.267	0.200	0.103	0.0368	0.009	0.001	0	0
$\mathbb{P}(X \leq k)$	0.028	0.149	0.383	0.650	0.850	0.953	0.999	0.998	0.999	1	1

Rappel: $\mathbb{P}(X = k) = \binom{10}{k} 0,3^k 0,7^{10-k}$

- Ainsi, on constate que $\mathbb{P}(D \leq 5) \approx 0,953 > 0,9$. Le stock recherché au taux de 0,9 est donc de 5 voitures!

Solution exemple

- $n = 10$ n'est pas grand, donc on ne peut pas utiliser l'approximation du TCL par une loi Normale.
- La loi (précise) de la demande quotidienne D est une *Binomiale*$(10; 0,3)$, que nous explicitons (valeurs arrondies):

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathbb{P}(X = k)$	0.028	0.121	0.233	0.267	0.200	0.103	0.0368	0.009	0.001	0	0
$\mathbb{P}(X \leq k)$	0.028	0.149	0.383	0.650	0.850	0.953	0.999	0.998	0.999	1	1

Rappel: $\mathbb{P}(X = k) = \binom{10}{k} 0,3^k 0,7^{10-k}$

- Ainsi, on constate que $\mathbb{P}(D \leq 5) \approx 0,953 > 0,9$. Le stock recherché au taux de 0,9 est donc de 5 voitures!

Le cas où l'écart type de la demande n'est pas connu...

- Tout ce qui précéde, est évidemment basé sur la connaissance de la loi de la demande D, qui est souvent mal connue.

Le cas où l'écart type de la demande n'est pas connu...

- Tout ce qui précéde, est évidemment basé sur la connaissance de la loi de la demande D, qui est souvent mal connue. L'idée naturelle est donc de collecter les données du nombre d'achats sur une certaine durée...

Le cas où l'écart type de la demande n'est pas connu...

- Tout ce qui précéde, est évidemment basé sur la connaissance de la loi de la demande D, qui est souvent mal connue. L'idée naturelle est donc de collecter les données du nombre d'achats sur une certaine durée...
- Supposons que la valeur de l'espérance m du nombre d'achats par client soit relativement bien connue. Pour la variance, on peut utiliser l'estimateur:

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n}X_i^2\ ] - \bar{X}_n{}^2.$$

Le cas où l'écart type de la demande n'est pas connu...

- Tout ce qui précéde, est évidemment basé sur la connaissance de la loi de la demande D, qui est souvent mal connue. L'idée naturelle est donc de collecter les données du nombre d'achats sur une certaine durée...
- Supposons que la valeur de l'espérance m du nombre d'achats par client soit relativement bien connue. Pour la variance, on peut utiliser l'estimateur:

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n}X_i^2\,] - \bar{X}_n{}^2.$$

- On distingue alors 2 cas:
  - Si $n \leq 30$ et que les X_i suivent des lois Normales, alors la variable $T_{n-1} := \frac{\sqrt{n-1}}{S_n}(\bar{X}_n - m)$ a pour loi un *Student* à $n-1$ degrès de liberté.

Le cas où l'écart type de la demande n'est pas connu...

- Tout ce qui précéde, est évidemment basé sur la connaissance de la loi de la demande D, qui est souvent mal connue. L'idée naturelle est donc de collecter les données du nombre d'achats sur une certaine durée...
- Supposons que la valeur de l'espérance m du nombre d'achats par client soit relativement bien connue. Pour la variance, on peut utiliser l'estimateur:

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n} X_i^2] - \bar{X}_n{}^2.$$

- On distingue alors 2 cas:
  - Si $n \leq 30$ et que les X_i suivent des lois Normales, alors la variable $T_{n-1} := \frac{\sqrt{n-1}}{S_n}(\bar{X}_n - m)$ a pour loi un *Student* à $n-1$ degrès de liberté. Par la même stratégie que celle du TCL, à l'aide des tables de la loi de *Student*, on peut alors estimer le stock nécessaire.

Le cas où l'écart type de la demande n'est pas connu...

- Tout ce qui précéde, est évidemment basé sur la connaissance de la loi de la demande D, qui est souvent mal connue. L'idée naturelle est donc de collecter les données du nombre d'achats sur une certaine durée...
- Supposons que la valeur de l'espérance m du nombre d'achats par client soit relativement bien connue. Pour la variance, on peut utiliser l'estimateur:

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n} X_i^2] - \bar{X}_n{}^2.$$

- On distingue alors 2 cas:
  - Si $n \leq 30$ et que les X_i suivent des lois Normales, alors la variable $T_{n-1} := \frac{\sqrt{n-1}}{S_n}(\bar{X}_n - m)$ a pour loi un *Student* à $n-1$ degrès de liberté. Par la même stratégie que celle du TCL, à l'aide des tables de la loi de *Student*, on peut alors estimer le stock nécessaire.
  - Si $n \geq 30$ et sans hypothèses sur la loi des X_i, on peut appliquer le TCL en remplacant σ par S_n. [En fait, les deux densités (Normale et Student(n)) sont très proches quand n est grand...]

Le cas où l'écart type de la demande n'est pas connu...

- Tout ce qui précéde, est évidemment basé sur la connaissance de la loi de la demande D, qui est souvent mal connue. L'idée naturelle est donc de collecter les données du nombre d'achats sur une certaine durée...
- Supposons que la valeur de l'espérance m du nombre d'achats par client soit relativement bien connue. Pour la variance, on peut utiliser l'estimateur:

$$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n} X_i^2\ ] - \bar{X}_n{}^2.$$

- On distingue alors 2 cas:
  - Si $n \leq 30$ et que les X_i suivent des lois Normales, alors la variable $T_{n-1} := \frac{\sqrt{n-1}}{S_n}(\bar{X}_n - m)$ a pour loi un *Student* à $n-1$ degrès de liberté. Par la même stratégie que celle du TCL, à l'aide des tables de la loi de *Student*, on peut alors estimer le stock nécessaire.
  - Si $n \geq 30$ et sans hypothèses sur la loi des X_i, on peut appliquer le TCL en remplacant σ par S_n. [En fait, les deux densités (Normale et Student(n)) sont très proches quand n est grand...]

Quand faire un réapprovisionnement ?

- L'enjeu est de calculer une valeur de *stock de sécurité* notée $S_{\text{sécu}}$ à partir de laquelle on doit lancer une commande.
- Là encore, il existe une multitude de modèles.

Quand faire un réapprovisionnement ?

- L'enjeu est de calculer une valeur de *stock de sécurité* notée $S_{\text{sécu}}$ à partir de laquelle on doit lancer une commande.
- Là encore, il existe une multitude de modèles. On peut par exemple imaginer 2 couches d'aléas (indépendants):
  -la demande quotidienne d_i (modélisation aléatoire précédente)

Quand faire un réapprovisionnement ?

- L'enjeu est de calculer une valeur de *stock de sécurité* notée $S_{\text{sécu}}$ à partir de laquelle on doit lancer une commande.
- Là encore, il existe une multitude de modèles. On peut par exemple imaginer 2 couches d'aléas (indépendants):
  -la demande quotidienne d_i (modélisation aléatoire précédente)
  -le délai de livraison L qui est une variable aléatoire.

Quand faire un réapprovisionnement ?

- L'enjeu est de calculer une valeur de *stock de sécurité* notée $S_{\text{sécu}}$ à partir de laquelle on doit lancer une commande.
- Là encore, il existe une multitude de modèles. On peut par exemple imaginer 2 couches d'aléas (indépendants):
  -la demande quotidienne d_i (modélisation aléatoire précédente)
  -le délai de livraison L qui est une variable aléatoire.
- Eviter la rupture de stock avec la proba $1-\alpha$, revient donc à chercher $S_{\text{sécu}}$ tel que

$$\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{L} d_i \leq S_{\text{sécu}}) \geq 1-\alpha$$

Quand faire un réapprovisionnement ?

- L'enjeu est de calculer une valeur de *stock de sécurité* notée $S_{\text{sécu}}$ à partir de laquelle on doit lancer une commande.
- Là encore, il existe une multitude de modèles. On peut par exemple imaginer 2 couches d'aléas (indépendants):
  -la demande quotidienne d_i (modélisation aléatoire précédente)
  -le délai de livraison L qui est une variable aléatoire.
- Eviter la rupture de stock avec la proba $1-\alpha$, revient donc à chercher $S_{\text{sécu}}$ tel que

$$\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{L} d_i \leq S_{\text{sécu}}) \geq 1-\alpha$$